به نام خداوند بخشنده مهربان

جبر خطی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

حمیدرضا ربیعی، مریم رمضانی

پاییز ۱۴۰۲

تجزیه ماتریس‌ها

تمرین پنجم

تاریخ انتشار: ۱۳ دی ۱۴۰۲

۱. پرسش‌های خود درمورد این تمرین را در سامانه کوئرا مطرح کنید.

۲. **سیاست ارسال با تاخیر:** شما در مجموع در طول نیم‌سال می‌توانید از ۱۶ روز تاخیر استفاده کنید. **همچنین هر تمرین تئوری و عملی را می‌توانید تا حداکثر ۳ روز با تاخیر تحویل دهید.** این مقدار برای تمارین تئوری و عملی به‌صورت جداگانه حساب می‌شود. تاخیرها با مقیاس ساعت محاسبه شده و به بالا گرد می‌شوند.

۳. **سیاست مشارکت دانشجویان در حل کردن تمارین:** دانشجویان می‌توانند در حل تمارین برای رفع ابهام و یا به‌دست آوردن ایده‌ی کلی با یک‌دیگر مشورت و همفکری کنند. این کار مورد تایید و تشویق تیم ارائه‌ی درس می‌باشد؛ چرا که هم‌فکری و کار گروهی می‌تواند موجب تقویت یادگیری شود. اما به‌دست آوردن جزئیات راه‌حل و نگارش پاسخ باید تماما توسط خود دانشجو انجام شود. **حتما در انتهای پاسخ‌های ارسالی خود نام افرادی که با آن‌ها همفکری کردید را ذکر کنید.**

۴. سوالات ۱ تا ۴ نمره کل تمرین را تشکیل می‌دهند. **بنابراین سوالات ۵ تا ۸ غیر تحویلی می‌باشند.**

سوالات تئوری (۸۰ نمره)

تاریخ تحویل: ۲۸ دی ۱۴۰۲

پرسش ۱ (۲۰ نمره) عبارت زیر را طبق تعریف نرم برای ماتریس اثبات کنید.

$$\|A\|_2=\sqrt{\lambda_{\max}\left(A^*A\right)}$$

تعریف نرم ۲ برای ماتریس :

$$\max\left\{\|Ax\|_2 : \|x\|=1\right\}$$

پاسخ ماتریس $B=A^*A$ را که هرمیتی است در نظر بگیرید. تبدیل خطی از فضای برداری اقلیدسی E هرمیتی است اگر و تنها اگر وجود داشته باشد پایه های یکه عمود از E که تمام بردار های ویژه ی B را شامل شود. اگر $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ را مقدار های ویژه ی B و $\{e_1,\ldots e_n\}$ را پایه های یکه عمود E در نظر بگیریم و λ_{j_0} بزرگ ترین مقدار ویژه ی B باشد خواهیم داشت :

برای $x=a_1e_1+\ldots+a_ne_n$،داریم: $\|x\|=\left\langle\sum_{i=1}^n a_ie_i,\sum_{i=1}^n a_ie_i\right\rangle^{1/2}=\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$ و $Bx=B\left(\sum_{i=1}^n a_ie_i\right)=\sum_{i=1}^n a_iB\left(e_i\right)=\sum_{i=1}^n \lambda_ia_ie_i$. پس:

$$\|Ax\|=\sqrt{\langle Ax,Ax\rangle}=\sqrt{\langle x,A^*Ax\rangle}=\sqrt{\langle x,Bx\rangle}=\sqrt{\left\langle\sum_{i=1}^n a_ie_i,\sum_{i=1}^n \lambda_ia_ie_i\right\rangle}$$

$$=\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i\overline{\lambda_ia_i}}\leq\max_{1\leq j\leq n}\sqrt{\left|\lambda_j\right|}\times(\|x\|)$$

پس اگر $\|A\|=\max\{\|Ax\|:\|x\|=1\}$ خواهیم داشت $\|A\|\leq\max_{1\leq j\leq n}\sqrt{\left|\lambda_j\right|}$. (۱) در نظر بگیرید: $x_0=e_{j_0}\Rightarrow\|x_0\|=1$ پس

$$\|A\|^2\geq\langle x_0,Bx_0\rangle=\langle e_{j_0},B\left(e_{j_0}\right)\rangle=\langle e_{j_0},\lambda_{j_0}e_{j_0}\rangle=\lambda_{j_0}\ (2)\ .$$

ترکیب کردن ۱ و ۲ نتیجه میدهد که $\|A\|=\max_{1\leq j\leq n}\sqrt{\left|\lambda_j\right|}$ که λ_j مقدار ویژه ی ماتریس $B=A^*A$ of است.

پس در نتیجه حکم اثبات شد::

$$\|A\|_2=\sqrt{\lambda_{\max}\left(A^*A\right)}=\sigma_{\max}(A)$$

پرسش ۲ (۲۰ نمره) v بردار ویژه ماتریس A با مقدار ویژه متناظر ناصفر است. نشان دهید v در فضای ستونی ماتریس A است.

پاسخ اگر برای λ نا صفر داشته باشیم $Av=\lambda v$ پس $v=\lambda^{-1}Av$، که یعنی v ترکیب خطی ای از ستون های A است.

پرسش ۳ (۲۰ نمره) ماتریس فیبوناچی به ماتریس $A=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}$ گفته میشود میخواهیم این ماتریس را به شکل $A=U\Sigma V^T$ بنویسیم، خواهیم داشت:

$$\Sigma=\begin{bmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{2}&0\\0&\frac{\sqrt{5}-1}{2}\end{bmatrix}.$$

.

پاسخ

$$A^TA = AA^T = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}.$$

مقادیر ویژه ماتریس ریشه های $x^۲ - ۳x + ۱$ هستند که برابرند با $\frac{۳\pm\sqrt{۵}}{۲}$. در نتیجه :

$$\sigma_۱^۲ = \frac{۳+\sqrt{۵}}{۲} \text{ and } \sigma_۲^۲ = \frac{۳-\sqrt{۵}}{۲}.$$

باید چک کنیم که آیا مربعات درایه های ماتریس برابر چیزی که در حکم آمده هست یا نه:

$$\left(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\right)^۲ = \frac{۱+۲\sqrt{۵}+۵}{۴} = \frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}.$$
$$\left(\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}\right)^۲ = \frac{۵-۲\sqrt{۵}+۱}{۴} = \frac{۳-\sqrt{۵}}{۲}.$$

پرسش ۴ (۲۰ نمره) ویژگی های A^+ را بررسی کنید:

۱. برای هر $\mathbf{y}$ در $\mathbb{R}^m$, $AA^+\mathbf{y}$ یک *orthogonal projection* از $\mathbf{y}$ در $\mathrm{Col}(A)$ است.

۲. برای هر $\mathbf{x}$ در $\mathbb{R}^n$, $A^+A\mathbf{x}$ یک *orthogonal projection* از $\mathbf{x}$ در $\mathrm{Row}(A)$ است.

۳. $AA^+A = A$ و $A^+AA^+ = A^+$.

دقت کنید که ماتریس A^+ همان pseudo inverse می‌باشد.

پاسخ ۱. چون ستون های V_r یکه عمود هستند ،

$$AA^+\mathbf{y} = \left(U_rDV_r^T\right)\left(V_rD^{-۱}U_r^T\right)\mathbf{y} = \left(U_rDD^{-۱}U_r^T\right)\mathbf{y} = U_rU_r^T\mathbf{y}$$

از آنجا که $U_rU_r^T\mathbf{y}$ یک پراجکت عمودی از $\mathbf{y}$ روی $\mathrm{Col}\,U_r$، و از آنجا که $\mathrm{Col}\,U_r = \mathrm{Col}\,A$ پس، $AA^+\mathbf{y}$ یک پراجکشن عمودی از y بر روی $\mathrm{Col}(A)$ است.

۲. چون ستون های U_r یکه عمود هستند ،

$$A^+A\mathbf{x} = \left(V_rD^{-۱}U_r^T\right)\left(U_rDV_r^T\right)\mathbf{x} = \left(V_rD^{-۱}DV_r^T\right)\mathbf{x} = V_rV_r^T\mathbf{x}$$

از آنجا که $V_rV_r^T\mathbf{x}$ یک پراجکت عمودی از $\mathbf{x}$ روی $\mathrm{Col}V_r$ ، و از آنجا که $\mathrm{Col}\,V_r = \mathrm{Row}\,A$ ، $A^+A\mathbf{x}$ یک پراجکشن عمودی از $\mathbf{x}$ روی $\mathrm{Row}(A)$ است.

۳.

$$\begin{aligned} AA^+A &= \left(U_rDV_r^T\right)\left(V_rD^{-۱}U_r^T\right)\left(U_rDV_r^T\right) = \left(U_rDD^{-۱}U_r^T\right)\left(U_rDV_r^T\right) \\ &= U_rDD^{-۱}DV_r^T = U_rDV_r^T = A \\ A^+AA^+ &= \left(V_rD^{-۱}U_r^T\right)\left(U_rDV_r^T\right)\left(V_rD^{-۱}U_r^T\right) = \left(V_rD^{-۱}DV_r^T\right)\left(V_rD^{-۱}U_r^T\right) \\ &= V_rD^{-۱}DD^{-۱}U_r^T = V_rD^{-۱}U_r^T = A^+ \end{aligned}$$

پرسش ۵ (۰ نمره) اگر A شبیه ماتریس $A^{-۱}$ باشد، تمام مقادیر ویژه برابر ۱ یا ۱- هستند ؟ اگر بله اثبات کنید در غیر این صورت مثال نقض بیاورید.

پاسخ مثال نقض:

$$\begin{pmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{۲} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix}^{-۱} \begin{pmatrix} \frac{۱}{۲} & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix}.$$

پس $\begin{pmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{۲} \end{pmatrix}$ شباهت دارد با $\begin{pmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{۲} \end{pmatrix}^{-۱}$.

پرسش ۶ (۰ نمره) طبق *Cholesky factorization* فرض کنید $A = C^{\mathrm{T}}C$ ، که $C^{\mathrm{T}} = L\sqrt{D}$ ، ماتریس بالا مثلثی C را برای هر دو مثال زیر پیدا کنید.

$$A = \begin{bmatrix} ۹ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۲ & ۸ \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۲ \\ ۱ & ۲ & ۷ \end{bmatrix}$$

پاسخ اولی

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۹ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow C = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۲ \end{bmatrix}$$

دومی

$$A=\left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{array}\right]\left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\0&0&5\end{array}\right]\left[\begin{array}{ccc}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{array}\right]\Rightarrow C=\left[\begin{array}{ccc}1&1&1\\0&1&1\\0&0&\sqrt{5}\end{array}\right]$$

پرسش ۷ (۰ نمره) نشان دهید که اگر ماتریس A مثبت معین باشد، وجود دارد یک ماتریس مثبت معین B به طوری که $A=B^TB$

پاسخ در نظر بگیرید $A=PDP^T$، که $P^T=P^{-1}$. مقادیر ویژه ی A همگی مثبت هستند: $\lambda_1,\dots,\lambda_n$. فرض کنید C یک ماتریس قطری باشد که $\sqrt{\lambda_1},\dots,\sqrt{\lambda_n}$ ها روی قطر آن قرار گرفته اند. پس $D=C^2=C^TC$. اگر $B=PCP^T$، پس B یک ماتریس مثبت معین است چون مقادیر ویژه ی آن اعداد مثبتی روی قطر ماتریس C هستند. همچنین

$$B^TB=\left(PCP^T\right)^T\left(PCP^T\right)=\left(P^{TT}C^TP^T\right)\left(PCP^T\right)=PC^TCP^T=PDP^T=A$$

در نتیجه $A=B^TB$.

پرسش ۸ (۰ نمره) اگر ماتریس A دارای ستون های دو به دو متعامد باشد که ستون w_i دارای اندازه ی σ_i است، ماتریس های V ،U,Σ .A^TA را به دست آورید.

پاسخ چون ستون های A بر هم عمود هستند، A^TA یک ماتریس قطری با درای های ${\sigma_n}^2,\dots,\sigma_1^2$ است . از آنجا که $A^TA=V\Sigma^2V^T$، پس داریم که Σ^2یک ماتریس است با درای های قطری ${\sigma_n}^2,\dots,{\sigma_1}^2$ و به دنبال آن Σ یک ماتریس با درایه های قطری $\sigma_1,\dots,\sigma_n$ است.

از آنجایی که $A^TA=V\Sigma^2V^T$، و همچنین $A^TA=\Sigma^2$ است پس نتیجه میگیریم $V=I$.

معادله ی $A=U\Sigma V^T$ نتیجه می دهد که U ماتریسی با ستون های $\frac{1}{\sigma_i}\mathbf{w}_i$ است. زیرا $V=I$ است و همچنین درایه های روی قطر اصلی Σ باید طوری ساده شود که ماتریس A به دست آید.